数 学 的 随 想

Toward Infinity: A Talk on Mathematical Culture

村松　眞一

MURAMATSU　Shin-ichi

Abstract: The ratio of the circumference of a circle to the diameter has long been one of the writer's great interests since he was nicknamed π in his middle school years. Though he specialized in English literature, his interest in mathematical problems has been sustained. He refers, in rather an idle way, to verbal memorability in Japanese of the ratio of π, Shakespeare's use of the verb *round* in *the Tempest*, superskilful *Iroha-uta*, the Japanese traditional and anonymous poem that teaches the wisdom of Buddha, consisting of 47 non-repetitive *kana* letters, limit or problems of "series", reality of "an imaginary number", and to some questions of infinity or "set theory". To conclude, the writer shows his preference for William Blake's poetical way —— "Hold Infinity in the palm of your hand".

Keywords: The memorable ratio of π, Shakespeare, *Iroha-uta*, series, an imaginary number, Infinity, set theory, Blake.
円周率の暗唱、円の形、シェイクスピア、いろは歌、極限値、虚数の存在、無限、ウィリアム・ブレイク。

私は旧制中学時代、どちらかと言えば理系志望だったように思われる。国語・漢文よりも数学のほうが面白く、一年生になってまだ間もないころ、数学の授業中に先生から数式を文字で表す例を知っているかと問われ、早速手を挙げて、「円の半径をｒ、面積をＳ、円周率をπで表せば、$S=\pi r^2$ です」と生意気にも答えたら、授業が終わるとすぐさま誰かが、私に「πさ」という渾名（あだな）をつけてしまった。

これは今思い出せばはなはだ名誉ある渾名であったわけだが、「パイさ」という呼び名は、それを聞いた人が、その謂われを知らなければ何だろうと思うような、奇妙な渾名でもあった。だから私自身、慣れるまで、そう呼ばれてちょっと戸惑うような照れくさいような、変な気持ちがしたものである。

私が文系に転じ、英文学を専攻しても、数（あるいは数学）の世界の不思議さには心のどこかで、関心が途切れなかったように思う。

数の世界は抽象的なもので、無味乾燥な世界と思われがちである。その道の専門家はどうか知らないが、私のように文学を学んだ者にとっては、その不思議さは一種の感覚的な、そして直観的なもののように思われる（これは数学者にとっては邪道であろうか）。

円の不思議、直径に対する円周の長さの比率、これが 3.1415926…と無限につづくこと、何万桁、否、何億桁まで計算しても——人が一生かかって計算しても、まだ計算し尽くせない、という事実に、私は一種のマジックのようなものを感じないわけにはいかなかった。

私が小学生のころ、盛んに算術の計算問題や応用問題を解くことに興じていたが、円周率の代用数値として、22／7 、また一層精密な代用数値としては 355／113 を使えることを知り、またその後、いつごろであったか、はっきり覚えていないが、円周率の近似値を小数点以下30桁まで暗唱して隠し芸としていたことがあった。これはいまも、いつでもどこでも棒読み暗唱できる。

3.141592653589793238462643383279…

しかし、今日では、何万桁までも暗唱できる方がいると伺ったことがあり（本誌にも執筆されており）、コンピューターによって、小数点以下１兆桁以上が計算されているとも言われる。だから私のは、ほんの初歩の初歩程度にすぎない。だが、私が感心するのは、それが単なる数字の羅列ではなく、暗唱を助ける有力な手段として、物語風にして読むことができることである。これはちょっとした百科事典にも出ているから、ご存じの方もあろう。この数値を

「産医師異国に迎う、産後厄なく、産婦御社（みやしろ）に、虫散々闇に泣く」

と覚えるのである。

これに肉付けして、ちゃんとした物語（ストーリー）にすると、こうなる——

昔ある異国で、お産が近づいたが、産科の医師がいない。困ったので急遽、本国から医師を迎えた。お産は無事に済み、産後の肥立ちも良かった。やがて赤ちゃんを連れてお宮参りにいったのだが、生まれたその子は神経質で肝の虫が強く、お宮さんで、「虫封じ」の祈祷をしてもらった。お陰さまで、その虫は散々な目にあい、闇で泣いている、と。

ともかくも、そんなわけで円周率πはいまもって不思議な数であり、たしかに「超越数」と呼ばれるに相応しい数の王者だと私は思っている。唱えると私にはまるで呪文のように聞こえるのである。

ちなみに、円周率πの不思議さを感じると、円という図形そのものも何やら不思議に感じられてくる。何の変哲もない円だというのに、「円」すなわち○は、見た目にまず感じがよろしい。記号としてはペケすなわち×よりずっと感じがよい。「円満」の「円」だからであろうか。そして何か完全を暗示しているような感覚がある。図形として閉じているから、完結していて、それ自体回転させても、同じ「円」○である。さらに連想されるの

は「円」や「丸い」を意味する英語 round（動詞用法もある）。これはなかなか味のある言葉で、シェイクスピアは晩年の作『あらし』の第４幕で、ミラノの大公プロスペローにこう語らせている。

our little life is rounded with a sleep.
我々のささやかな人生は眠りで全うされるのです。

ところで、直径１cmの円周の長さはπcmというわけであるが、この長さのものを実際精密に作ろうとすると、小数点以下何桁まで出して誤差を少なくすればよいのだろうか。今日のいわゆるナノ・テクノロジーの領域に入っていくのかもしれないが、いくら精密にしたところで、やはりピッタリπcmにはならないのであろう。否、技術的にはこうしたものは、物理的にものを回転させて作ってしまうのかもしれない。しかし私が言いたいのは、πという数のもつ神秘性である。πを「超越数」と命名したのは誰であるか知らないが、年を取っても私には依然として魅力ある数であることに変わりはない。

並んでいる数字を何か意味のある文のように読んで、暗唱するというのは、英語など外国語では、おそらく極めて難しいことではないだろうか。私はあまり聞いたことがない。$\sqrt{2}$、つまり２の平方根の数値は、最後に小数点以下まで計算して答えを出す必要上、「1.41421356…」を「一夜(ひとよ)一夜(ひとよ)に人見頃」と暗唱して覚えたものである。$\sqrt{3}$や$\sqrt{5}$についても同様で、それぞれ「1.7320508 …」＝「人並みに奢れや」、「2.2360679 」＝「富士山麓鸚鵡(おうむ)鳴く」と覚えたものであった。

ついでにここで脱線を許していただくと、弘法大師作と伝えられ、じつは平安中期の作であるという、例の「いろは歌」も、47文字をただの１字も繰り返さずに今様の和歌にしてしまったその妙は、感嘆のほかはない。しかもそれが、仏法を説いているのだから見事であり、こんな例は、世界のいかなる言語でもまずあるまいとさえ思われる。いろはカルタの絵札の文字を順に棒読みすれば、

イロハニホヘトチリヌルヲワカヨタレソツネナラムウヰノオクヤマケフコエテアサキユメミシヱヒモセス

であるが、これが

色は匂へど散りぬるを、我が世誰ぞ常ならむ、有為の奥山今日越えて、浅き夢見じ酔ひもせず

であるのだから、今更のように驚く。『涅槃経』のなかの偈(げ)「諸行無常　是生滅法　生滅

滅已　寂滅為楽」を和訳したものと言われるが、誰が試みても、なかなかこう巧くはいくものじゃない。弘法大師様が作られたという伝説が発生しても無理はない。

ところで私が感じる数の不思議、そのなかには人間の無限への思いがたぶん含まれているのであろう。そもそも「無限」とは何か。私は英文学研究を志したが、物心がついてから、何となく「無限」とか「究極」とかいう言葉に、一種のいうに言えない憧れがあったような気がする。それはロマンティックなもので、私がロマン派の詩歌が好きなことと、直接関係はなくとも、どこかで繋がりがあるのかもしれない。しかしまた一方、それに関連してと言えばよいのか、「収斂」や「発散」という言葉にも妙に惹かれるものがあった。

これも昔小学6年生の時、算術の教科書に出ていて、いまも覚えている問題がある。

「あるところに1本の苗木があった。それは最初の1年間に1mの高さまで伸びた。次の1年間には2分の1m伸びた。3年目には4分の1m、4年目には8分の1m伸びた。このような割合で伸びていったら、この木は結局何メートルに達するでしょうか？」

という問いであった。最初子供の感覚では、伸び方は年毎に半分になってはいくものの、際限もなく伸びていくような気がしたものである。しかしよく考えてみて、1mを10㎝に縮尺して、鉛筆で線を引いて伸び状態を観察してみたら、一定限度までしか伸びないことが分かった。実際、この答えは2mである。

ところが同じ苗木でも伸び方の設定を変えるとどうだろうか。

最初の1年間に1m、次の1年間に2分の1m、3年目には3分の1m、4年目には4分の1mというようにすると、今度は際限もなく伸びることになるのである。つまり「天まで伸びる」。

これは後に級数（数列の和）の問題であることを知り、無限級数の「収斂」、「発散」ということを小学生レベルで考えさせるものであった。

もう一つ興味があることは、「虚数」という数の想定である。日常普通に考えれば存在するはずのない数、英語では imaginary number （想像上の数）というらしい。話を簡単にするために純虚数に限って考えると、自乗してマイナスになるような数で、$i^2=-1$。つまりマイナス1の平方根、$i=\sqrt{-1}$ を単位とするものである。

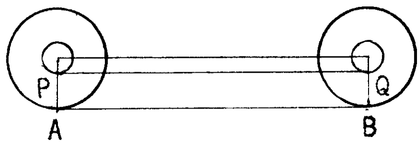
私が面白いと思ったのは、－1は実数で、虚数iを二度掛け合わせると実数になるという事実であった。感覚的には「嘘から出たまこと」と言えばちょっと語弊があるが、何となく「瓢箪から駒」といった感覚、仮に冗談のつもりで言ったことが、思いがけなく本当に実現するといった感覚なのである。実際には、2次（以上）の方程式を統一的に扱うために導入された数学的存在で、複素数として電気関係の計算にも使われると聞いたことがある。$a+bi$ というような、実数と虚数が混じりあった数を見ていると、数学の世界もまた一種の人間臭さというのか、私には「虚々実々」という言葉すら浮かんでくる。ちなみに『岩波数学入門辞典』によると、今日では、虚数はπと同様に立派な「実在」する数だそうである。

最後に無限に関する数学的談義を一つ。一体「無限」とは何か？「無限大」というのはそもそも「数」であろうか？

一つの素朴な考えから初める。{1, 2, 3, 4, 5, …} という整数の集まりがある。この集まりは無限に大きくなりうる。これを記号で∞と書くことにする。次に、この中から偶数だけ取り出し、{2, 4, 6, 8, 10, …} という集まりを作る。これも無限に大きくなりうる。すなわち∞で、同じ記号を使わざるをえない。すると不思議なことが起きる。整数の無限集合とその中の偶数の無限集合は１対１の対応があるので、無限の世界では、全体から取り出した部分も、全体に等しい、と。

何故このようなことが起きるのだろうか。それは「無限」という「数」は我々が想像することは出来ても、実体として具体的に把握できないからではないだろうか。具体的に考えようとすると、我々は有限の世界に引き戻され、ともすれば有限の世界でものを考えるからではないか。

大分以前（1993年～94年）、『静岡新聞』に当時の静岡西高校の校長竹谷勝氏が「数の不思議な世界」というコラムを連載で執筆されたことがある。その中でこの問題をとりあげ、次のような興味あるパラドックスを紹介されていた。



図のように５円硬貨を一回転させる。すると外の円周上の点Ａが一回転して点Ｂまで行く間に、内の円周上の点Ｐも一回転して点Ｑまで行く。外の円の半径をＲ、内の円の半径をｒとすれば、線分ＡＢと線分ＰＱの長さは等しいから、$2\pi R = 2\pi r$、すなわち$R = r$となってしまう。

こうした問題は現代数学のいわゆる「集合論」の領域に属するもので、ドイツ人数学者カントル（Cantor）によって初めて考えられた。彼は「無限」を実在するものと捉え、しかも無限の種類が１つでないことを言い切ったという。そして数学の世界の主流の考え方は、いまも現実的な「無限」を受け入れる立場だそうである（『岩波哲学・思想事典』）。

しかし一方で、「無限」の問題が哲学的、宇宙論的な問題に連なることは自明である。一体、宇宙の時間的空間的な広がりは、実体的具体的な無限（現実的無限）として把握されうるものかどうか？宇宙の彼方に何かを発見しようとすることは、すでに宇宙を有限の世界の尺度で見ていることになるであろう。「無限」の存在は認識できても、それは想像の世界にとどまり、その実体的な記述には限界があるのではないか*。この世に有限な生を享け、私のように詩に言い知れぬ妙味を感じ、味わっている者には、このような問題は詩的想像力によって直観的な余韻ある表現をもってするほうが、わかり易くはるかに感動的だと思われるのだが。だから、この拙いエッセイは、ウィリアム・ブレイクの有名な詩句で結ぶことにしたい。

砂一粒に世界を
野の花一輪に天国を見るために
きみの手のひらに無限を
ひとときに永遠を把握するために

（「無垢のまえぶれ」より）

＊オーストリアの哲学者ヴィトゲンシタイン（Wittgenstein,1889-1951）は、それ自体で確定的に実在する無限集合を認めると、いかにグロテスクな帰結を招くかを、巧みに例示しているとのことである。